Robert Müller

Bundesrealgymnasium Wien 3

WACHSTUMSPROZESSE

0. Vorbemerkungen

Täglich werden wir aus den Medien mit Schlagzeilen wie:"Die Staatsausgaben wachsen ...", "Die Inflation sinkt ...", "Der Strombedarf steigt ...", usw. konfrontiert. Die durch diese Schlagzeilen angesprochenen sogenannten Wachstumsprozesse sind

* allgegenwärtig: Sie eignen sich daher hervorragend für einen "beziehungsvollen" (H. FREUDENTHAL) und "anwendungsnahen" Mathematikunterricht unter Einschluß des Unterrichtsprinzips der 'Politischen Bildung'.

* im allgemeinen sehr komplex: Sie eignen sich daher hervorragend für das Modellbilden und die Einbeziehung kybernetischer und synergetischer Aspekte in den Mathematikunterricht.

* im Prinzip diskret und im Kleinen stochastisch: Sie eignen sich daher hervorragend dazu 'philosophische' Aspekte der Mathematik im Sinne eines Wechselspiels zwischen diskret und kontinuierlich sowie zwischen stochastisch und deterministisch zu aktualisieren.

* von arithmetischer u n d geometrischer Natur: Sie eignen sich daher hervorragend dazu quantitative Beschreibungen (z.B. Populationsgrößen) und qualitative Beschreibungen (z.B. die räumliche Verteilung der Population) in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit im Mathematikunterricht zu vereinen.

All das klingt sehr anspruchsvoll - und ist es auch !

Dennoch zeigt die Erfahrung (des Autors), daß im Rahmen des Mathematik- (und EDV-)Unterrichts der achten Klasse einer AHS eine solche Gesamtschau des 'Wesens' und der 'Methode' der Mathematik gleichermaßen wertvoll wie durchführbar ist.

Im Sinne des Spiralprinzips bietet sich der folgende Weg an:

1) Lineares und Exponentielles Wachstum
2) Vernetzte Beispiele zum Linearen und Exponentiellen Wachstum
3) Hyperbolisches und Logistisches Wachstum
4) Grundsätzliche Aspekte der Modellbildung
5) (Um-)Verteilungsprozesse
6) Zeitlupe und Zeitraffer bei Wachstumsprozessen
7) Geometrie der Wachstumsprozesse
8) Simulation von Wachstumsprozessen

Im hier vorliegenden (ersten Teil des) Manuskript(es) werden nur die ersten vier Kapitel näher ausgeführt;- doch ist geplant, den zweiten Teil im Rahmen der nächstjährigen Fortbildungsveranstaltung darzubieten.

1. Lineares und Exponentielles Wachstum

Aufbauend auf die (erst) in der achten Klasse verfügbaren Kenntnisse läßt sich die folgende systematische Gegenüberstellung bewerkstelligen:

Diskretes Modell

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{1} = k_i \qquad i \in \mathbb{N}$$

k_i ... 1. Differenzenfolge gibt die Wachstumsgeschwindigkeit der 'Menge' y in Abhängigkeit von Zeitsprüngen an.

Kontinuierliches Modell

$$\lim_{t \to 0} \frac{y(t_0) - y(t_0 - \Delta t)}{\Delta t} = k(t_0) \qquad t \in \mathbb{R}$$

$k(t)$ ... 1. Ableitung gibt die Wachstumsgeschwindigkeit der 'Menge' y in Abhängigkeit von der Zeit an.

a) Lineares Wachstum:

Def.: Der mittlere bzw. momentane Zuwachs ist unabhängig von der Menge und Zeit, also konstant !

$$y_i - y_{i-1} = k_{disk}$$

$$y_1 = k + y_0$$
$$y_2 = k + y_1 = k + (k + y_0) = 2.k + y_0$$
....
$$\boxed{y_i = i.k + y_0}$$

$$\frac{dy}{dt} = k_{cont}$$
$$\int dy = \int k.dt$$
$$y = k.t + C$$
wegen $y_0 = k.0 + C$
$$\boxed{y(t) = k.t + y(0)}$$

Das Auftreten des Linearen Wachstums ist in der Natur eher selten; vielmehr wird es häufig 'normativ' durch den Menschen festgesetzt.

b) Exponentielles Wachstum:

Def.: Der Zuwachs ist ein fester Prozentanteil des jeweils 'letzten' Wertes der Menge.

$y_i - y_{i-1} = k.y_{i-1} \quad k=k_{disk} \in \mathbb{R}$

$y_1=y_o.(1+k)=y_o.q \quad q=1+k$

$y_2=y_1.q=(y_o.q).q=y_o.q^2$

....

$\boxed{y_i = y_o.(1+k)^i} = y_o.q^i = y_o.e^{\ln q.i}$

$\frac{dy}{dt} = k.y \quad k=k_{cont} \in \mathbb{R}$

$\ln y = k.t + C$

$e^{\ln y} = e^{kt+C}$

$y = e^C.e^{kt}$

$\boxed{y(t) = y(0).e^{kt}}$

Das Auftreten des Exponentiellen Wachstums ist bei physikalischen Prozessen (wie Radioaktivität, Druckzu(ab)nahme, Absorption, Entladungsvorgängen etc.) häufig, nicht jedoch bei biologischen Vorgängen.

Natürlich ist im Unterricht k_{disk} von k_{cont} sorgfältig zu unterscheiden ! Wird dieselbe Zahl $k \in \mathbb{R}$ in beiden Modellen verwendet, so wächst das kontinuierlich-modellierte y (wegen $\ln(1+k) \leq k$) schneller. Soll das 'gleiche' Wachstum (in verschiedenen Modellen) beschrieben werden, so ist gemäß $k_{cont} = \ln(1+k_{disk})$ umzurechnen.

2. Vernetzte Beispiele zum Linearen und Exponentiellen Wachstum

Beispiel Waldnutzung: Der jährliche Zuwachs an Holz eines Schlages von 10 000 m^3 Holz beträgt 2,56 %. Der jährliche Einschlag beträgt 500 m^3.

a) Gib eine allgemeine Formel für die Holzmenge im i-ten Jahr an!

b) Nach wieviel Jahren ist es um den Wald geschehen ?

c) Berechne, wie groß der Einschlag sein darf, um den Wald 'auf Dauer' nutzen zu können!

Lösung: a) $y_o = 10\,000 \quad q=1+k=1,0256 \quad d=500$

$y_1 = q.y_o-d$

$y_2 = (q.y_o-d).q-d=q^2.y_o-q.d-d$

....

$y_i = q^i.y_o - d.(q^{i-1} + q^{i-2} + \ldots + q + 1) = q^i.y_o - d.\frac{q^i-1}{q-1}$

b) $y_i \leq 0$

$0 \geq q^i(q-1).y_o - d.q^i + d$

$-d \geq q^i\left[(q-1).y_o - d\right]$

$$\frac{\ln \dfrac{d}{d-(q-1).y_o}}{\ln q} \leq i \qquad \text{, speziell: } i \leq 29$$

c) Zuwachs = Einschlag !! d.h. $k.y_o = d$ speziell: $d=256\ m^3$

<u>Beispiel Einfuhrbeschränkung:</u> Das Handelsministerium erteilt Einfuhrgenehmigungen (Kontingentierung). Von einer gewissen Ware dürfen heuer 20 000 Stück eingeführt werden, wobei diese Quote jährlich um 2000 Stück wächst. Der Markt nimmt derzeit 50 000 Stück auf, und wächst mit k % p.a..

a) Berechne die (bestmögliche) Entwicklung des Marktanteils für alle ausländischen Anbieter dieser Ware in den nächsten ... Jahren (in Prozent und in Stück)!

b) In welchem Jahr haben die ausländischen Anbieter maximalen Marktanteil (in Prozent). Speziell für k=1 %, 3 %, 5 %.

c) Ein Manager des Generalimporteurs verspricht den ausländischen Erzeugern, in 5 Jahren den halben Markt erobert zu haben. Welche Kombinationen von Grund- und Steigerungskontingenten muß er (mindestens) 'aushandeln', um das erreichen zu können ?

Lösung: a) $y_i = 20\,000 + 2\,000.i$ ... max. Stückzahl

$$r_i = \frac{20\,000 + 2\,000.i}{50\,000.q^i} \quad \text{... max. Marktanteil}$$

b) $$r_i' = \frac{2\,000.50\,000.q^i - (20\,000+2\,000.i).50\,000.q^i.\ln q}{(50\,000.q^i)^2}$$

$$0 = 2\,000.(1 - 10.\ln q - i.\ln q)$$

$$i = \frac{1 - 10.\ln q}{\ln q}$$

speziell: $k = 1$ % $i \approx 90$ Jahre (nicht möglich, Marktanteil wäre größer 1)

$k = 3$ % $i \approx 24$ Jahre

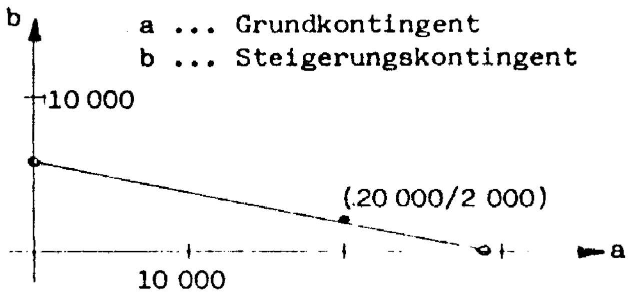
$k = 5$ % $i \approx 10$ Jahre

c) $$r_i = 0{,}5 = \frac{a + b.i}{50\,000.q^i}$$

speziell: $i=5$, $q=1{,}03$

$a + 5.b = 25\,000.1{,}03^5$

$a + 5.b = 28\,982$



dh., der Manager braucht bei k=3 % nicht neu verhandeln; die bestehende Regelung erlaubt schon die Erfüllung seiner Zusage, da P(20 000/2 000) in der 'oberen Halbebene' liegt !

Beispiel Arbeitslosigkeit: In einer Stadt mit (gleichbleibend) 50 000 Arbeitsfähigen (und -willigen) gibt es derzeit $y_o = 2\,000$ Arbeitslose. Pro Jahr verlieren b=1 500 Personen ihren Job. k=50 % aller Arbeitslosen finden bis zum nächsten Jahr wieder einen Arbeitsplatz.

a) Gib eine allgemeine Formel für die Arbeislosenzahl an !

b) Ein Politiker 'beschwört' (seine) Wähler:"...wenn diese Entwicklung so weitergeht, dann seid ihr bald alle arbeitslos...". Zeige, daß er Unrecht hat !

c) Diskutiere umgangssprachlich, welche (stillschweigenden) Voraussetzungen dem Modell zugrunde

d) Tabelliere (ev. unter Verwendung geeigneter Programme) die Entwicklung der nächsten 10 Jahre für:

$k=0{,}5$; $y_o=2\,000$; $b=1\,000$

$k=0{,}2$; $y_o=5\,000$; $b=3\,000$

$k=0{,}8$; $y_o=2\,000$; $b=1\,000$

Lösung: a) $y_o = 2\,000 \quad q=1-k=0{,}5 \quad b=1\,500$

$$y_1 = q.y_o + b$$
$$y_2 = y_1.q + b = (q.y_o+b).q+b=q^2.y_o + b(q+1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_i = q^i.y_o + b.(q^{i-1} + q^{i-2} + \ldots + 1)=q^i.y_o + b.\frac{q^i-1}{q-1}$$

b) Im vorliegenden Fall rechnet man leicht die Monotonie der Funktion nach: $y_{i+1} > y_i$

$$q^{i+1}.y_o+b.(q^i+ \ldots + 1) > q^i.y_o + b.(q^{i-1} + \ldots + 1)$$
$$q.q^i.y_o+b.q^i > q^i.y_o$$
$$q + \frac{b}{y_o} > 1$$
$$\text{speziell: } 0{,}5 + \frac{1\,500}{2\,000} > 1 \quad \text{w.A.}$$

Wegen $\lim_{i \to \infty} y_i = 0.y_o + b.\frac{1}{1-q} = \frac{b}{k}$

ergibt sich speziell als Grenzwert 3 000, und dieser ist obere Grenze; der Politiker kann seine 'Prognose' nicht mathematisch absichern !

c) und d) sollen zeigen, wie leicht man falsche Prognosen abzugeben bereit ist, und soll auch die Modellhaftigkeit unseres Tuns offenlegen !

Beispiel Ethnogramm: In einem Land wohnen zwei Volksgruppen W und S, derzeit

y_o = 8 Mill. W, die sich mit k=1 % p.a. vermehren,

$\bar{y}_o$ = 6 Mill. S, die sich mit $\bar{k}$=2 % p.a. vermehren.

a) Wann werden die beiden Volksgruppen gleich stark sein ?

b) Die Volksgruppe W will die stärkere bleiben, und läßt jährlich b = 20 000 W, aber keine S, einwandern. Zeige, daß dies das Überholen durch die derzeit schwächere Volksgrüppe nur (unwesentlich) hinauszögert !

Lösung: a) $8.(1+0{,}01)^i = 6.(1+0{,}02)^i$

$$i = \frac{\ln \frac{8}{6}}{\ln \frac{1{,}02}{1{,}01}}$$

speziell: $i \approx 29$

b) Voraussetzung : Einwanderung erfolgt jeweils am Ende des Jahres. Zu zeigen bleibt:

$$q^i.y_o + b.\frac{q^i-1}{q-1} < \bar{y}_o.\bar{q}^i \quad \text{für genügend großes } i$$

Einfacher ist es, die stärkere Aussage

$$q^i.y_o + b.\frac{q^i}{q-1} < \bar{y}_o.\bar{q}^i$$

- aus der ja die obere folgt - zu beweisen!

$$q^i.(y_o+ \frac{b}{q-1}) < \bar{y}_o.\bar{q}^i$$

$$\frac{q^i}{\bar{q}^i} < \frac{\bar{y}_o}{y_o+\frac{b}{q-1}}$$

$$i > \frac{\ln \bar{y}_o - \ln(y_o+\frac{b}{q-1})}{\ln q - \ln \bar{q}}$$

speziell: $i > 52$ (für die 'stärkere' Behauptung - tatsächlich schon früher, nämlich für $i \geq 37$ Jahre)

3. Hyperbolisches und Logistisches Wachstum

Die Individuen helfen oder behindern einander gegenseitig, und verstärken oder schwächen so die Wachstumsgeschwindigkeit:

a) Hyperbolisches Wachstum:

Die Individuen helfen einander.

Def.: $\frac{dy}{dt} = (k.y).y$ liefert $\boxed{y(t) = \frac{y(0)}{1 - y(0).k.t}}$

Bew.: $\frac{dy}{dt} = k.y^2 \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int k.dt \longrightarrow -\frac{1}{y} = k.t - C \rightarrow y = \frac{1}{C - k.t}$

und mit der Anfangsbedingung $y(0) = \frac{1}{C}$ ergibt sich die Behauptung.

Beispiel Weltbevölkerung: Die Weltbevölkerung betrug 1300 n.Chr. etwa 0,4 Mrd. Menschen, 1975 etwa 4 Mrd.. Ermittle die 'Ersatzhyperbel', insbesonders den Wert zu Christi-Geburt, sowie, wann unendlich angenommen würde !

Lösung: $$\left.\begin{aligned} 0{,}4 &= \frac{y(0)}{1-y(0).k.1300} \\ 4 &= \frac{y(0)}{1-y(0).k.1975} \end{aligned}\right\} \text{liefert} \left\{\begin{aligned} \frac{y(0)}{0{,}4} &= 1 - y(0).k.1300 \\ \frac{y(0)}{4} &= 1 - y(0).k.1975 \end{aligned}\right.$$

und nach Multiplikation mit 1975 bzw. -1300 durch Elimination

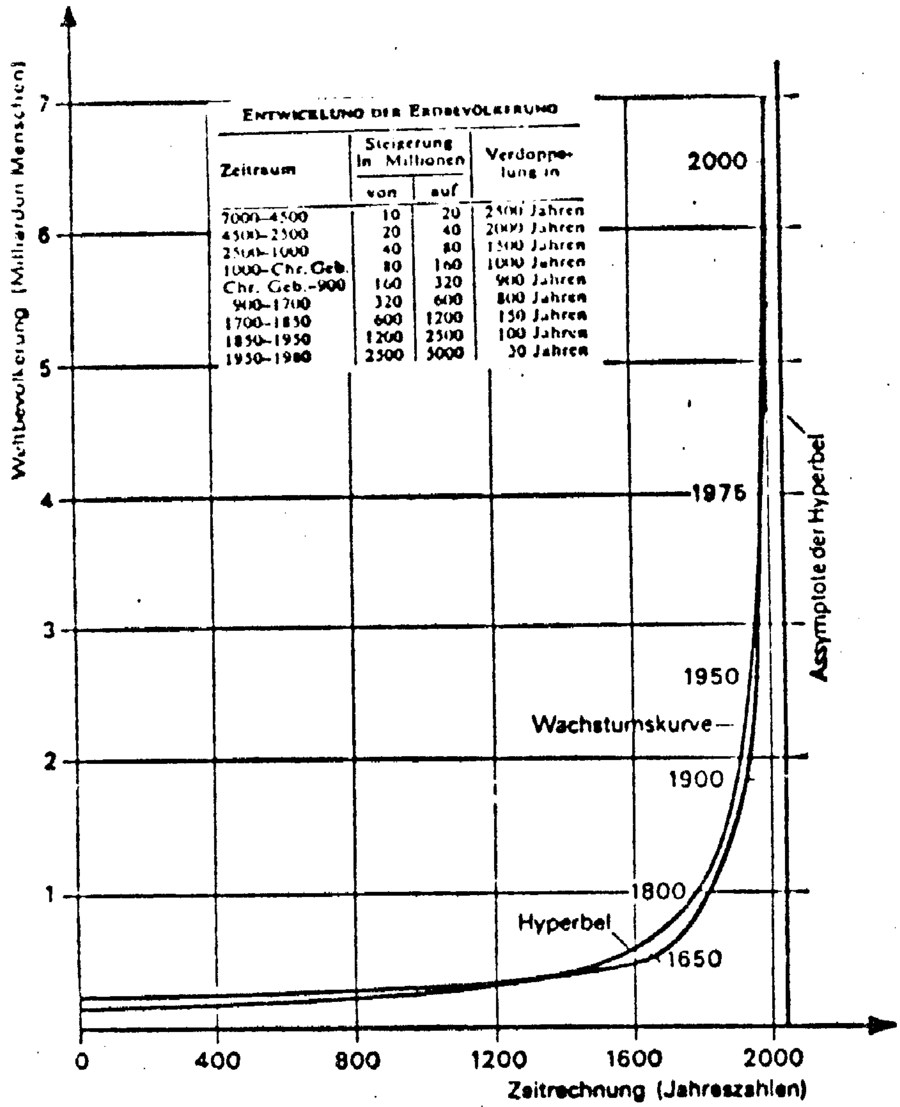
$$y(0).\left(\frac{1975}{0{,}4} - \frac{1300}{4} \right) = 1975 - 1300$$

also $y(0) \approx 0{,}15$, und durch Rückeinsetzen $k \approx 1/300$.

Der 'Wert' unendlich wird bei $t \approx 2050$ angenommen, was nicht realistisch erscheint.

Wegen der Existenz einer endlichen Unendlichkeitsstelle wird das Hyperbolische Wachstum von vielen Autoren als unsinnig bzw. uninteressant abgetan,- m.E. zu Unrecht ! Einerseits ist es ein 'gutes' Modell für Kettenreaktionen (Atombombe, Publikationsflut,...), andererseits wird es bei der Beschreibung gewisser Evolutionsphasen der Sache durchaus gerecht: - Eine anfänglich exponentiell wachsende Bevölkerung entwickelt erst ab einer gewissen Populationsdichte (möglicherweise) jene sozialen Strukturen, welche gegenseitige Hilfe und damit katalytisches Wachstum mitsichbringt. Ab einem (nicht fest umrissenen) Zeitpunkt geht das exponentielle Wachstum in ein hyperbolisches über, dessen charakteristische Größe k durchaus nicht zeitinvariant sein muß! Jedenfalls zeigt diese Population hinsichtlich der Selektion ein vollkommen anderes Verhalten: Hyperbolisch-wachsende Populationen sind (praktisch irreversibel) selektiert, und lassen das Hochwachsen anderer, neuer (mutierter) Populationen praktisch nicht mehr zu, wohingegen dies bei 'bloß' exponentiellem Wachstum noch durchaus der Fall sein kann.

Für die unten dargestellte Entwicklung der Menschheit bedeutet dies zweierlei: Erstens, daß die 'Ersatzhyperbel' trotz guter graphischer Anpassung sicherlich erst in der Neuzeit mit Berechtigung zur Modellierung herangezogen werden darf; vorher herrscht ein (lange Zeit nahezu linear verlaufendes) exponentielles Wachstum. Zweitens, daß - entgegen einem bekannten Ausspruch von K.LORENZ - der Mensch scheinbar doch nicht nur der letzte Schrei, sondern doch der letzte Wille der Schöpfung ist.



Entwicklung der Erdbevölkerung

Zeitraum	Steigerung in Millionen von	auf	Verdoppelung in
7000–4500	10	20	2500 Jahren
4500–2500	20	40	2000 Jahren
2500–1000	40	80	1500 Jahren
1000–Chr. Geb.	80	160	1000 Jahren
Chr. Geb.–900	160	320	900 Jahren
900–1700	320	600	800 Jahren
1700–1850	600	1200	150 Jahren
1850–1950	1200	2500	100 Jahren
1950–1980	2500	5000	30 Jahren

Allerding wächst auch eine sich hyperbolisch vermehrende Bevölkerung - wegen der einschränkenden Nebenbedingungen - natürlich nicht in den Himmel:

b) Logistisches Wachstum:

Die Individuen behindern einander gegenseitig. Die Gesamtzahl n der 'Existenzplätze' ist beschränkt. Die Zahl y der Individuen ändert sich mit einer Geschwindigkeit, die proportional ist zu y und zur Zahl der noch freien 'Existenzplätze'.

Def.: $\frac{dy}{dt} = k.y.(n-y)$ liefert $\boxed{y(t) = \frac{n.y(0)}{y(0)+(n-y(0)).e^{-ktn}}}$

Bew.: $\int \frac{dy}{y.(n-y)} = \int k.dt$ ergibt nach Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{n}.\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{n}.\int \frac{dy}{n-y} = \int k.dt \implies \frac{1}{n}.\ln \frac{y}{n-y} = k.t + C$$

$$\frac{y}{n-y} = e^{(k.t+C).n} \longrightarrow y.(1 + e^{n(kt+C)}) = n.e^{n(kt+C)}$$

$$y = \frac{n}{1 + e^{-n(kt+C)}}$$ und gemäß der Anfangsbedingung

$$y(0) = \frac{n}{1 + 1.e^{-nC}}$$ die Behauptung.

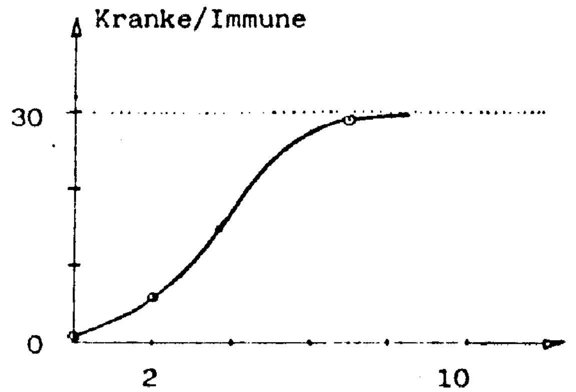
Die 'Logistische Kurve' (- auch 'Autokatalytische Kurve' genannt) läßt sich unschwer diskutieren. Besonders wichtig ist ihre Symmetrie zum Wendepunkt, dessen Ordinate stets n/2 ist.

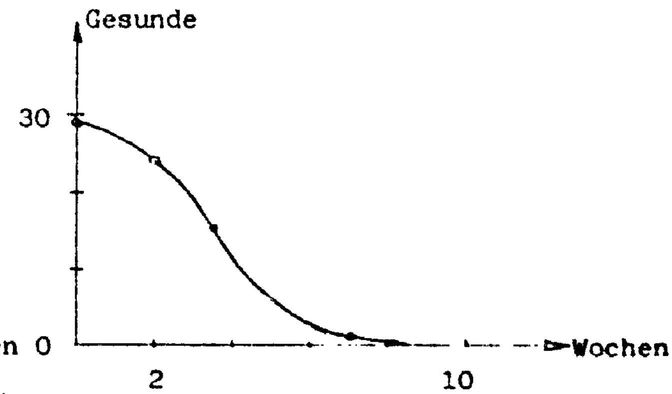
<u>Beispiel Grippewelle:</u> In einer Klasse mit 30 Schülern ist einer erkrankt. Zwei Wochen später waren bereits 6 Schüler erkrankt (gewesen). Beschreibe den Epidemieverlauf mittels der logistischen Kurve !

Lösung: n=30 y(0)= 1 y(2)=6

$$6 = \frac{30}{1 + 29.e^{-k.2.30}} \longrightarrow k \approx 0{,}033, \quad y(5) \approx 25,\ y(7) \approx 29 \ \ldots$$

Tabelliert man die Kurve, so sieht man, daß nach 10 Wochen alle Schüler die Grippe (latent) durchgemacht haben:





Beispiel Weltbevölkerung: Beschreibe die Weltbevölkerungsentwicklung durch eine logistische Kurve !

Lösung : Offenbar braucht man drei Stützstellenwerte (aus der Tabelle) zur Bestimmung der Funktionsgleichung. Naheliegend ist die Verwendung von äquidistanten Stützstellen, - zB. y(0),y(850) und y(1700) - , weil man so ein elementar lösbares Gleichungssystem erhält:

$$\frac{n.y(0)}{y(0)+(n-y(0)).e^{-kn850}} = y(850)$$

$$\frac{n.y(0)}{y(0)+(n-y(0)).e^{-kn1700}} = y(1700)$$

Man setzt $e^{-kn850} = z$ und formt um zu

$$\frac{\frac{n.y(0)}{y(850)} - y(0)}{n - y(0)} = z$$

$$\frac{\frac{n.y(0)}{y(1700)} - y(0)}{n - y(0)} = z^2$$

Nach Quadrieren der ersten Gleichung kann man die linken Seiten gleichsetzen und erhält schließlich eine quadratische Gleichung mit stets verschwindendem absoluten Glied (da ja y=0 die untere Sättigungsgrenze ist) für n. Durch Rückeinsetzen in die Substitutionszeile erhält man k.

Allerdings muß man feststellen, daß die Tabellenwerte y(0)=0,16 Mrd., y(850)=0,31 Mrd. und y(1700)=0,60 Mrd. als Ergebnis $n \approx 135$ Mrd. liefern - ein sowohl vom mathematischen wie interpretativen Standpunkt nicht aussagekräftiger Wert. Dies liegt (auch) daran, daß hier ein rechentechnisch äußerst instabiler Fall vorliegt ! Schon geringfügige Änderungen an den Stützstellenwerten liefern völlig andere (u.U sogar negative) Ergebnisse. Probieren Sie etwa die Wertetripel (y(0),y(850),y(1700))= $(0{,}15/0{,}\dot{3}/0{,}6)$;(0,15/0,3/0,6);(0,16/0,3/0,6) einzusetzen !

Offensichtlich ist unser Modell (schon allein) wegen der unzulässigen Extrapolation unbrauchbar. In anderen Fällen, etwa der Populationsentwicklung der U.S.A zwischen 1790 und 1930, gibt das logistische Wachstum

$$y = \frac{197\ 273\ 000}{1 + e^{-0{,}03134 \cdot t}}$$ (Zeitnullpunkt im Jahr 1914)

ein 'hervorragendes' Bild der tatsächlichen Entwicklung,- was aber noch nicht heißt, daß das Modell dem Tatbestand wirklich adäquat ist: Hiefür würde man wohl verlangen, daß die Strukturvoraussetzungen im Modell die Strukturgesetzlichkeiten in der 'Wirklichkeit' wiederspiegeln, was im vorliegenden Fall nicht auf der Hand liegt.

4. Grundsätzliche Aspekte der Modellbildung

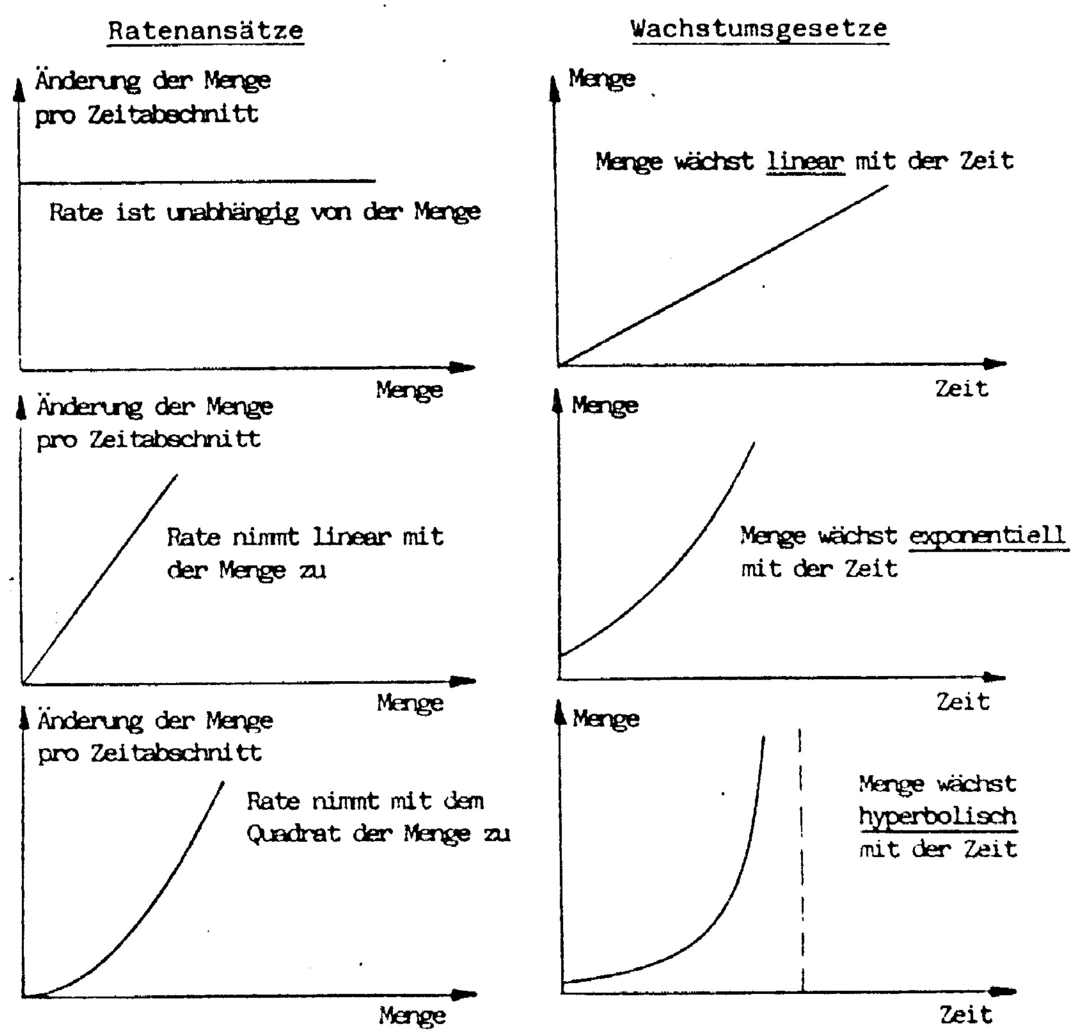
a) Wachstums-'Typen' und Wachstums-'Funktionen':

Es bieten sich verschiedene 'Funktionelle Abhängigkeiten' zur Beschreibung von Wachstumsprozessen an:

Wachstumsgesetz: Abhängigkeit der Menge von der Zeit (von Zeitsprüngen).

Wachstumsrate : Abhängigkeit der zeitlichen Änderung der Menge von der Menge selbst.

Wachstumsgeschwindigkeit: Abhängigkeit der zeitlichen Änderung der Menge von der Zeit.



Eine systematische Auflistung möglicher 'Wachstums'-Funktionen erhält man aus:

Lineare Funktion: Gleicher absoluter Zuwachs der Argumente bewirkt stets gleichen absoluten Zuwachs der Funktionswerte.

$$f(x_1+h)-f(x_1)=f(x_2+h)-f(x_2) \quad (= k.h \quad \text{für } f:x \rightarrow kx+d)$$

Exponentialfunktion: Gleicher absoluter Zuwachs der Argumente bewirkt stets gleichen relativen Zuwachs der Funktionswerte.

$$\frac{f(x_1+h)}{f(x_1)} = \frac{f(x_2+h)}{f(x_2)} \quad (= a^h \quad \text{für } f:x \rightarrow C.a^x)$$

Logarithmusfunktion: Gleicher relativer Zuwachs der Argumente bewirkt stets gleichen absoluten Zuwachs der Funktionswerte.

$$f(x_1.h)-f(x_1)=f(x_2.h)-f(x_2) \quad (={}^a\log h \text{ für } f:x \rightarrow {}^a\log x +d)$$

Potenzfunktion: Gleicher relativer Zuwachs der Argumente bewirkt stets gleichen relativen Zuwachs der Funktionswerte.

$$\frac{f(x_1.h)}{f(x_1)} = \frac{f(x_2.h)}{f(x_2)} \quad (= h^r \quad \text{für } f:x \rightarrow C.x^r)$$

Diese (für 'beliebig kleines' h genauso gültigen) Gesetzlichkeiten lassen sich sowohl 'a-posteriori' als (weitere) Rechtfertigung der Anwendung eben dieser Funktionen vorweisen, als auch 'a-priori' zu ihrer Kennzeichnung und Ableitung verwenden !

b) "Welt"-Formel für Wachstumsprozesse

Analog wie z.B. in der Wahrscheinlichkeitstheorie, wo man versucht, 'verschiedene' Verteilungen einem 'übergeordneten' Typ (als Sonderfall) zuzuordnen (z.B. die Exponentialverteilung als Sonderfall der Gammaverteilung auffaßt, oder noch weitgehender versucht solche Verteilungen durch eine gemeinsame Differentialgleichung kennzuzeichnen - z.B. 'PEARSONsche Differentialgleichung'-), so sucht(e) man auch nach einer solchen gemeinsamen Beschreibung aller Wachstumsprozesse. Diese (bisher nur empirisch abgesicherte) Superformel lautet:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = A.y^k.(B - y^w)^l \qquad k,w,l \in \mathbb{R}$$

Die hier besprochenen Wachstumsmodelle ordnen sich als Sonderfälle ein:

$\dot{y} = A$ .... Lineares Wachstum

$\dot{y} = A.y$ .... Exponentielles Wachstum

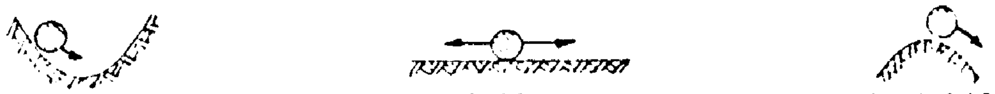
$\dot{y} = A.y^2$......... Hyperbolisches Wachstum

$\dot{y} = A.y.(B-y)$ ... Logistisches Wachstum

Oft begnügt man sich mit qualitativen Aussagen hinsichtlich der sog.

c) Stabilitätsprobleme

3 Grundtypen eines Systemverhaltens:



stabil indifferent instabil

Das (Wachstums-)Verhalten von physikalischen, chemischen und biologischen Systemen wird durch (nicht unbedingt) ein Paar von Antagonisten (Geburt/Tod, Aufbau/Abbau,..) bstimmt. Diese Kräfte verfolgen - qualitativ gesehen -

3 Grundstrategien:

* Indifferente Strategie: Die Wahrscheinlichkeit für Geburt oder Tod hat einen definierten Mittelwert, der unabhängig von der Populationsgröße bzw. deren Veränderung ist .... S_0

  Anders als in der Biologie ist diese Strategie auf der Ebene der Moleküle gang und gäbe.

* Konforme Strategie: Die Geburten- und Sterberate ist von der Größe der Population abhängig; Die Änderung der jeweiligen Rate erfolgt mit dem gleichen Vorzeichen wie die Veränderung der Populationszahl.. S_+

  In der Biologie ist diese Strategie vorherrschend

* Konträre Strategie: Die Geburten- und Sterberate ist von der Größe der Population abhängig; Die Veränderung der jeweiligen Rate erfolgt mit dem entgegengesetzten Vorzeichen wie die Veränderung der Populationszahl... S_-

Diese Strategien sind von der 'Natur' im allgemeinen fest vorgegeben; man vergleiche etwa die Radioaktiven Prozesse, die Druckzunahme beim Tauchen etc.. Allerdings gibt es auch Ausnahmen von dieser "Strukturgesetzlichkeit": 'Höhere' Lebewesen verfolgen z.B. nicht immer die konforme Strategie; Ratten beantworten etwa eine (zu) große Populationsdichte mit einer Abnahme der Geburtenrate. Auch auf 'niederer' Ebene gibt es solche Ausnahmen; die allosterischen Enzyme schalten sich z.B je nach Umweltbedingung selbst an oder ab (vgl. Atmungs- und Gärungsprozesse).

Das durch die obigen 3 Grundstrategien bestimmte Systemverhalten kann man in seinem qualitativen Verhalten durch die folgende "Auszahlungsmatrix" charakterisieren:

		Geburt S_+	Geburt S_o	Geburt S_-
Tod	S_+	variabel	stabil	stabil
Tod	S_o	instabil	indiffer	stabil
Tod	S_-	instabil	instabil	variabel

"variabel" bedeutet hiebei ein nichttriviales Systemverhalten, welches sich aus den drei Grundtypen zusammensetzt.

Mit der Untersuchung von Stabilitätsproblemen von Systemen hat man sich weg von einer 'isolierten' hin zu einer 'kybernetischen' Betrachtungsweise von Wachstumsprozessen aufgeschwungen. Der zweite Teil diese Vortrages wird ganz im Zeichen dieser 'Geisteshaltung' stehen !

Literatur:

Dorninger D.: Aktuelle Anwendungen der Mathematik im Unterricht
Skriptum zur Lehrerfortbildung , TU Wien, 1985

Eigen M./Winkler R.: Das Spiel. Naturgesetze steuern den Zufall
Verl. R. Piper 1978

Engel A. : Mathematische Modelle der Wirklichkeit
Verl. Klett, Reihe 'Der Mathematikunterricht', Jg. 17/ Heft 3, 1971

Fischer R., unter Mitarbeit von H. Bürger u. G. Malle:
Didaktische Fragen zur Differentialrechnung
Skriptum zur Lehrerfortbildung, Universität Klagenfurt, 1980

Peschel M. : Entgegen einer Systemtheorie für Wachstumsprozesse
(Unveröffentlichter ?) Vortrag vom 7.10.1981 vor der
Österreichischen Gesellschaft für Kybernetik

Vogel A.: Differenzengleichungen
(Unveröffentlichter ?) Vortrag beim Lehrerfortbildungstag 1983
der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft in Wien.